Gindikin-Karpelevich formulaの拡張 (組合せ論的表現論とその応用)

AUTHOR(S):

中筋, 麻貴

数理解析研究所講究録
第 1738 巻 2011 年 120-130

Gindikin-Karpelevich formulaの拡張

津田塾大学数学・計算機科学研究所 中筋麻貴 (Maki Nakasuji)
Institute for mathematics and computer science,
Tsuda College

R. Langlandsによって得られたGindikin-Karpelevich formulaは, p-進体上の古典群の主系列表現におけるspherical vectorの積分を, ルートを用いた大変きれいな形の積で表した公式である. 本稿では, これを組合せ論的に拡張する. なお, ここで得られた結果はアメリカ, Stanford大学のDaniel Bump氏との共同研究で得られたものである.

1 Gindikin-Karpelevich formula

Gをnon-archimedeanな局所体F上のsplit semisimple代数群とする. また, $\mathfrak{o}$をFの整数環, $\mathfrak{p}$を$\mathfrak{o}$の極大イデアル, qを剰余体のcardinalityとする. このとき, $G(F)$のBorel部分群$B(F)$は, 極大split torus $T(F)$とunipotent radical $N(F)$を用いて$B(F)=T(F)N(F)$と表すことができる. $T(F)$の指標χに対し, χから誘導される$G(F)$の主系列表現は

$$V(\chi)=\{f:G(F)\rightarrow\mathbb{C}|f(bg)=(\delta^{1/2}\chi)(b)f(g)\}$$

と定義される. ここで, $\delta:B(F)\longrightarrow\mathbb{C}$はmodular quasicharacterとし, χは$\chi(tn)=\chi(t)$として, $N(F)$上trivialとなるようにB上に拡張しておく. また, $G(F)$の作用はright translationとする.

実際, $G=GL_{r+1}(F)$のとき, ${}^{L}G$のdiagonal group $T(\mathbb{C})$の元$\mathbf{z}=\mathrm{diag}(z_1,\cdots,z_{r+1})\in T(\mathbb{C})$ $(z_i\in\mathbb{C}^{\times})$と$\mu\in\mathbb{Z}^{r+1}$に対し, 指標は$\mathbf{z}\longmapsto\mathbf{z}^{\mu}=\prod z_i^{\mu_i}$と定義される. すなわち, 指標$\chi$は

$$\chi\begin{pmatrix} y_1 & * & \cdots & * \\ & y_2 & & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & y_{r+1}\end{pmatrix}=\prod z_i^{\mathrm{ord}(y_i)}$$

と表される. このとき, $f^{\circ}(bk)=\delta^{1/2}\chi(b)$, $(b\in B(F),\ k\in K=GL_{r+1}(\mathfrak{o}))$を満たす関数$f^{\circ}$は$G$の主系列表現$V(\chi)$におけるspherical vectorとなる.

さて, ワイル群Wの元wに対し, Intertwining作用素$M_w:V(\chi)\longrightarrow V({}^{w}\chi)$を次で定義する. なお, N_-はGの下三角のmaximal unipotent radicalを表す:

$$M_wf(g)=\int_{N_-}f(nwg)dn. \tag{1.1}$$

R.Langlands による Gindikin-Karpelevich formula は，(1.1) において $w = w_0$(ワイル群の最長元), $f = f^\circ$ とし，$g = 1$ のときの明示公式である．

Theorem 1.1 ルート系 Φ の *positive root* の集合を Φ^+ とする．このとき以下の等式が成り立つ．

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(nw_0)\,dn = \prod_{\alpha\in\Phi^+} \frac{1-q^{-1}\mathbf{z}^\alpha}{1-\mathbf{z}^\alpha}. \tag{1.2}$$

Gindkin と Karpelevich によって得られたオリジナルの Gindikin-Karpelevich formula は，$p=\infty$ のとき，すなわち，実半単純リー群の表現論に表れる Harish-Chandra の c-函数に関するものであった．(詳しくは [5]，[9]) 1971 年，R.Langlands はこれを p 進群に拡張し ([9])，後に (1980)W. Casselman が別証明を与えた ([4])．

本稿では，Theorem 1.1 を次の 3 つの方法で拡張する．

1) クリスタルを用いて表示する．(第 2 節)
2) 1) をメタプレクティック群に拡張する．(第 3 節)
3) w を任意のワイル群の元，f を spherical vector f° を一般化した関数に拡張する．(第 4 節)

1), 2) はクリスタル表示として連続する話となるため“2 つの方法で拡張”とするべきかもしれない．なお，本稿で述べられなかった証明とさらなる考察は，1), 2) は [2], 3) は [3] を参考にしていただきたい．

2 Gindikin-Karpelevich formula のクリスタル表示

Φ をルート系 (ここでは A_r 型を扱う) とする．α_i $(i = 1,\cdots r)$ を simple root, $\alpha_i^\vee$ を対応する coroot とする．Λ を weight lattice とすると，Φ に対するクリスタル $\mathcal{B}$ は各要素の weight を表す写像 $\mathrm{wt}:\mathcal{B}\longrightarrow\Lambda$, Kashiwara operator $f_i, e_i : \mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{B}\cup\{0\}$ ([6] では $\tilde{f}_i$, $\tilde{e}_i$ と定義されている.), Kashiwara operator で定義される ϕ_i, $\varepsilon_i : \mathcal{B}\longrightarrow\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$ をもつ．ここで Kashiwara operator は $v\in\mathcal{B}$ に対し，$e_i(v)\neq 0$ のとき $f_ie_i(v) = v$, $\mathrm{wt}(e_i(v)) = \mathrm{wt}(v)+\alpha_i$, 同様に $f_i(v)\neq 0$ のとき $e_if_i(v) = v$, $\mathrm{wt}(f_i(v)) = \mathrm{wt}(v)-\alpha_i$ を満たす．また，ϕ_i は $f_i^\phi(v)\neq 0$ となる最大の整数 ϕ，$\varepsilon_i(v)$ は $e_i^\varepsilon\neq 0$ となる最大の整数 ε であり，$\phi_i(v) = \langle\mathrm{wt}(v),\alpha_i^\vee\rangle+\varepsilon_i(v)$ を満たすものとする．

ワイル群 W の最長元 w_0 の既約表現を simple reflection の積

$$w_0 = s_{w_1}\cdots s_{w_N} \qquad (N = \frac{1}{2}r(r+1))$$

で表し，これを $\Omega = (w_1, w_2, \cdots, w_N)$ とおく．

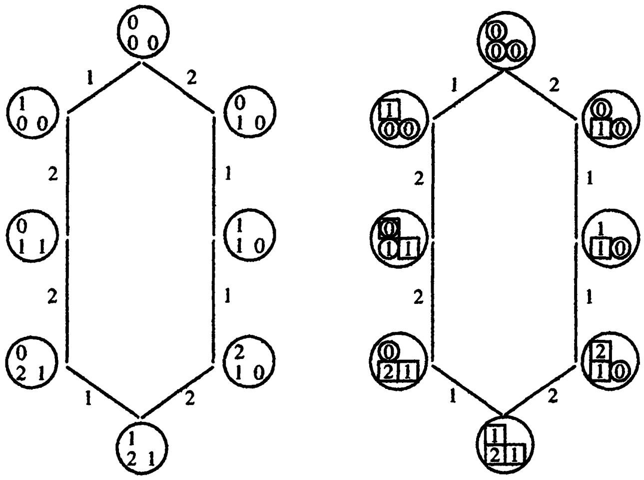

FIGURE 1. $\lambda=(2,1,0)$ に対する (左) BZL pattern, (右)decoration を行った BZL pattern. なお，クリスタルの辺に書かれた数字は f_i もしくは e_i の i を表し，各頂点の値は，$\begin{matrix} & b_1 & \\ b_2 & & b_3 \end{matrix}$ を表す.

Definition 2.1 *highest weight* が $\mathrm{wt}(v_{\mathrm{high}})=\lambda$ のクリスタルを $\mathcal{B}_\lambda$ とする．$v\in\mathcal{B}_\lambda$ に対し，b_1 を $e_{w_1}^{b_1}(v)\neq 0$ となる最大の整数とする．また b_2 を $e_{w_2}^{b_2}e_{w_1}^{b_1}(v)\neq 0$ となる最大の整数とする．以下同様に定義した $\{b_i\}$ を

$$\mathrm{BZL}(v)=(b_1,\cdots,b_N)$$

と表し，*BZL pattern* と呼ぶ *(“string parameter”と呼ばれることもある)*.

BZL pattern の要素について，次のルールに従って “circling” と “boxing” で decoration を行う．なお，Circling rule は，Littelmann([10]) による BZL pattern の性質から得られたルールである.

Circling rule. $\Omega=(1,2,1,3,2,1,\cdots,r,r-1,\cdots,3,2,1)$ もしくは $\Omega=(r,r-1,r,r-2,r-1,r,\cdots,1,2,3,\cdots,r)$ において，$i\in\{1,3,6,10,\cdots\}$ に対し，$b_i=0$ を満たすとき，b_i を circle で囲む.

Boxing rule. $f_{w_i}e_{w_{i-1}}^{b_{i-1}}\cdots e_{w_1}^{b_1}(v)=0$ を満たすとき，b_i を box で囲む.

実際，A_2 型，$\lambda=(2,1,0)$ に対する BZL pattern および decoration を行った BZL pattern の例を Figure 1. に示した.

Brubaker-Bump-Friedberg は，この Circling rule および Boxing rule を用いて，以下に示す “Tokuyama function G_Ω”を導入した.

Definition 2.2 $v \in \mathcal{B}$ に対する *BZL pattern* $(b_1, b_2, \cdots)$ において，*"Tokuyama function"* G_Ω を以下で定義する：

$$G_\Omega(v) = \prod_{i=1}^{N} \begin{cases} (1-q^{-1})(-q^{b_i-1}) & b_i \text{ が circle でも box でも囲まれていないとき}, \\ -q^{b_i-1} & b_i \text{ が box でのみ囲まれているとき}, \\ q^{b_i} & b_i \text{ が circle でのみ囲まれているとき}, \\ 0 & b_i \text{ が circle および box の両方で囲まれているとき}. \end{cases}$$

なお，$B(\infty)$ では Boxing rule は起こらないため，２行目および４行目の定義は無効となることに留意する．

Tokuyama([11]) により，Schur 多項式 s_λ を Gelfand-Tsetlin pattern の言葉で表すことができることが示されているが，Brubaker-Bump-Friedberg は Tokuyama deformation として Weyl character formula のクリスタル表示をこの Tokuyama function G_Ω を用いることにより与えた．

Theorem 2.3 *[1, Theorem 5].* λ を *dominant weight* とする．また $z_1, \cdots, z_{r+1}$ を $g \in GL_{r+1}(\mathbb{C})$ の固有値とする．このとき，既約表現の指標 $\chi_\lambda(= s_\lambda)$ について以下のクリスタル表示が成り立つ．

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+} (1 - q^{-1}\mathbf{z}^\alpha)\chi_\lambda(g) = \sum_{v \in \mathcal{B}_{\rho+\lambda}} G_\Omega(v) q^{-\langle \mathrm{wt}(v) - w_0(\lambda+\rho), \rho \rangle} \mathbf{z}^{\mathrm{wt}(v) - w_0\rho}.$$

ここで得られた左辺は，次に述べる Casselman-Shalika 公式 ($G = GL_{r+1}$ のとき) の右辺に表れる．

Theorem 2.4 λ を *dominant weight* とする．このとき，

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(n)\psi_\lambda(n)dn = \mathbf{z}^{-w_0\lambda}[\prod_{\alpha \in \Phi^+}(1 - q^{-1}\mathbf{z}^\alpha)] s_\lambda(z_1, \cdots, z_{r+1}) \tag{2.1}$$

が成立する．ここで s_λ は *Schur* 多項式，ψ_λ は F 上の *fixed additive character* ψ_0 で定義される *nondegenerate additive character* を表す：

$$\psi_\lambda \begin{pmatrix} 1 & & & \\ x_{2,1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{r+1,1} & \cdots & x_{r+1,r} & 1 \end{pmatrix} = \psi_0(\varpi^{\lambda_1 - \lambda_2} x_{r+1,r} + \cdots + \varpi^{\lambda_r - \lambda_{r+1}} x_{2,1}),$$

ここで，ϖ は $\mathfrak{o}$ の素元とする．

すなわち，(2.1) は次のように書き換えられる．

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(n)\psi_\lambda(n)dn = \sum_{\mathcal{B}_{\lambda+\rho}} G_\Omega(v)q^{-\langle \mathrm{wt}(v)-w_0(\lambda+\rho),\rho\rangle}\mathbf{z}^{\mathrm{wt}(v)-w_0(\rho+\lambda)}. \tag{2.2}$$

これだけで既に Casselman-Shalika formula のクリスタル表示は得られているが，Gindikin-Karpelevich formula へ導くためにはさらなる変形が必要となる．そこで用いるのが，Schutzenberger involution Sch : $\mathcal{B}_{\lambda+\rho} \longrightarrow \mathcal{B}_{\lambda+\rho}$，および Kashiwara による morphism $M_{\lambda+\rho} : \mathcal{B}(\infty) \longrightarrow \mathcal{B}_{\lambda+\rho} \otimes \mathcal{T}_{-\lambda-\rho}$ (T_λ は weight が λ の 1 元で生成されるクリスタル) である．(morphism M_λ については，A_2 型, $\lambda = (2,1,0)$ に対する具体的な図を Figure 2. に示す．) これらを用いることにより，(2.2) は次のように書き換えられる．

Theorem 2.5 λ を *dominant weight* とする．このとき，

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(u)\psi_\lambda(u)du = \sum_{\mathcal{B}_{\lambda+\rho}\otimes\mathcal{T}_{-\lambda-\rho}} G_\Omega(v)q^{-\langle w_0(\mathrm{wt}(v)),\rho\rangle}\mathbf{z}^{w_0(\mathrm{wt}(v))}.$$

次に，weight の λ を無限としたときの両辺について考察する．

Proposition 2.6 環 $R = \mathbb{C}[q][[z^{\alpha_1},\cdots,z^{\alpha_r}]]$ とすると，$\int_{N_-(F)} f^\circ(n)\psi_\lambda(n)dn \in R$ であり，$\lambda \longrightarrow \infty$ とすると，環 R の *topology* において $\int_{N_-(F)} f^\circ(n)\psi_\lambda(n)dn$ は $\int_{N_-(F)} f^\circ(n)dn$ に収束する．

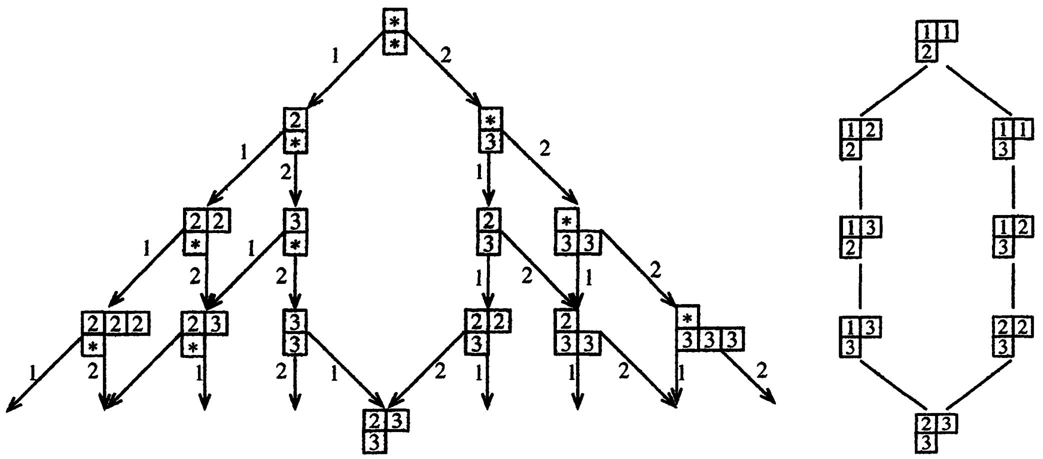

FIGURE 2. (左)$\mathcal{B}(\infty)$, (右)$\lambda = (2,1,0)$ の時の M_λ の image.
なお，Kashiwara の記述に従い，各頂点には対応する tableau をおいた．

一方，右辺は$\mathcal{B}(\infty)$に渡る和として解釈できるため，Theorem 2.5から以下が成り立つ．

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(n)dn = \sum_{\mathcal{B}(\infty)} G_\Omega(v)q^{-\langle w_0(\mathrm{wt}(v)),\rho\rangle}\mathbf{z}^{w_0(\mathrm{wt}(v))}.$$

ここでワイル群の最長元w_0による作用を考慮すると，Gindikin-Karpelevich formulaのクリスタル表示となる次の定理が得られる．

Theorem 2.7

$$\int_{N_-(F)} f^\circ(nw_0)dn = \sum_{v\in\mathcal{B}(\infty)} G_\Omega(v)q^{\langle \mathrm{wt}(v),\rho\rangle}\mathbf{z}^{-\mathrm{wt}(v)}.$$

3 メタプレクティック群への拡張

体Fが1の原始m乗根を含むとする．群Gの1の原始m乗根の群μ_mによる中心拡大を$\tilde{G}$(m-fold metaplectic cover)とする:

$$1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow \tilde{G}(F) \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

また，K^*を$\tilde{G}(F)$におけるKのimageとする．

前節のspherical vectorf°の類似として次の関数を考える．

Definition 3.1 *section* $\mathbf{s} : G \longrightarrow \tilde{G}(F)$，$k \in K^*$に対し，$\tilde{f}^\circ : \tilde{G} \longrightarrow \mathbb{C}$を次を満たすものとして定義する：

$$\tilde{f}^\circ\left(\mathbf{s}\begin{pmatrix} t_1 & * & \cdots & * \\ & t_2 & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & t_{r+1}\end{pmatrix} k\right) = \begin{cases} \prod z_i^{\mathrm{ord}(t_i)} & m|\mathrm{ord}(t_i) \quad (1 \le i \le r+1) \text{のとき}, \\ 0 & \text{その他}. \end{cases}$$

関数fが$f(\varepsilon g) = \varepsilon f(g)$ for $\varepsilon \in \mu_n$を満たすとき，これを*genuine*と呼ぶことにすると，上で定義した$\tilde{f}^\circ$は$\tilde{G}(F)$上唯一つの*genuine*関数となる．

メタプレクティック群のGindikin-Karpelevich formulaに関しては，Kazhdan-Pattersonによって次の定理が報告されている．

Theorem 3.2 *[8, Proposition I.2.4].*

$$\int_{N_-(F)} \tilde{f}^\circ(nw_0)dn = \prod_{\alpha\in\Phi^+} \frac{1-q^{-1}\mathbf{z}^{m\alpha}}{1-\mathbf{z}^{m\alpha}}.$$

これに前説で用いた議論を応用することにより，クリスタル表示を与えるのが本節の目的である．

まず，$v \in \mathcal{B}(\infty)$ に対して Definition 2.1 で定義された BZL pattern について，Circling rule を考察することにより，次を示すことができる．

Proposition 3.3

$$\prod_{\alpha\in\Phi^+} \frac{1-q^{-1}\mathbf{z}^{m\alpha}}{1-\mathbf{z}^{m\alpha}} = \sum_{\substack{v\in\mathcal{B}(\infty) \\ BZL(v)=(b_1,\cdots b_N) \\ b_i \text{ が } circle \text{ でないなら，} m|b_i}} (1-q^{-1})^{s(v)}\mathbf{z}^{-\mathrm{wt}(v)}.$$

なお，$s(v)$ は circle で囲まれていない b_i の個数を表す．

Tokuyama function の類似関数を

$$G^*_\Omega(v) = \prod_{i=1}^{N} \begin{cases} q^{-b_i}h(b_i) & b_i \text{ が circle で囲まれていないとき} \\ 1 & b_i \text{ が circle で囲まれているとき} \end{cases}$$

と定義する．ここで，

$$h(a) = \begin{cases} (q-1)q^{a-1} & m|a \text{ のとき，} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とする．このとき，Proposition3.3 は次で表される．

$$\prod_{\alpha\in\Phi^+} \frac{1-q^{-1}\mathbf{z}^{m\alpha}}{1-\mathbf{z}^{m\alpha}} = \sum_{\mathcal{B}(\infty)} G^*_\Omega(v)\mathbf{z}^{-\mathrm{wt}(v)}.$$

$\langle \mathrm{wt}(v), \rho\rangle = -\sum b_i$ であることを考えると，右辺は前説の Tokuyama function G_Ω を用いて

$$\sum_{\mathcal{B}(\infty)} G_\Omega(v)q^{\langle \mathrm{wt}(v),\rho\rangle}\mathbf{z}^{-\mathrm{wt}(v)}$$

で表すことができる．すなわち，次の定理が成り立つ．

Theorem 3.4

$$\int_{N_-(F)} \tilde{f}^\circ(nw_0)dn = \prod_{\alpha\in\Phi^+} \frac{1-q^{-1}\mathbf{z}^{m\alpha}}{1-\mathbf{z}^{m\alpha}} = \sum_{\mathcal{B}(\infty)} G_\Omega(v) q^{\langle \mathrm{wt}(v),\rho\rangle} \mathbf{z}^{-\mathrm{wt}(v)}. \tag{3.1}$$

ここでKashiwara ([6]) によって導入された $\mathrm{wt}(m\cdot v) = m\mathrm{wt}(v)$ および $f_i^m(m\cdot v) = m\cdot(f_i v)$ を満たす写像

$$m\cdot : \mathcal{B}_\lambda \longrightarrow \mathcal{B}_{m\lambda}$$

を考える．なお，λ は dominant weight とする．$\mathcal{B}(\infty)$ に対応する $m\cdot : \mathcal{B}(\infty) \longrightarrow \mathcal{B}(\infty)$ を考慮すると，(3.1) の右辺は，Kashiwara の $m\cdot$ 写像の image である $\mathcal{B}(\infty)$ の元に渡る和とみなし，Theorem3.4 が，Theorem2.7 の $m\cdot$ 写像による拡張と捉えることができる．

4 Gindikin-Karpelevich formulaの一般化

K を G の極大コンパクト部分群，J を K の Iwahori 部分群とすると，χ が general position のとき，$V(\chi)$ は既約であり，χ が unramified のとき，$V(\chi)^J$ (J-fixed vetors) の次元はワイル群 W の order に等しい．このことから，$V(\chi)^J$ の基底が W で parametrize されることは自然なことであり，その自然な基底の 1 つ $\{\phi_w | w \in W\}$ を次を満たすものとして定義する．$b \in B(F)$, $u \in W$, $k \in J$ に対し，

$$\phi_w(buk) = \begin{cases} \delta^{1/2}\chi(b) & u = w \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合.} \end{cases}$$

ここで，$u, v \in W$ に対し，$\psi_u = \sum_{v\geq u} \phi_v$ を定義する．本節では，(1.1) において，任意の $w, u \in W$ に対して，$f = \psi_u$ としたときを扱う．本研究に関しては，いくつかの計算結果から以下の予想が得られたところであり，解決はしていない．(一部のみ解決している ([3] 参照))．

Conjecture 4.1 *[3] Φ を simply-laced とする．$u \leq v$ (Bruhat order) に対し，* $S(u,v) = \{\alpha \in \Phi^+ | u \leq v.r_\alpha \leq v\}$ とすると，$|S(u,v)| = l(v) - l(u)$ を満たす (u,v) に対し，

$$(M_v\psi_u)(1) = \int_{N_-(F)} \psi_u(nw)\, dn = \prod_{\alpha\in S(u,v)} \frac{1-q^{-1}\mathbf{z}^\alpha}{1-\mathbf{z}^\alpha}$$

が成立する．ここで r_α は $\alpha \in \Phi^+$ に対する *reflection* とする．

本予想は，Casselman によって定義された $V(\chi)^J$ の基底 (ϕ_w とは異なる基底) に関する問題 (Casselman 問題) と深く関わっているが，本稿では Gindikin-Karpelevich formula の拡張としてみなされる所以と相違点について述べるにとどめる．Casselman の基底との関係や，予想について得られた (部分的ではあるが) 詳しい結果に関しては [3] を参考にしていただきたい．

Remark 1 *spherical vector* $f^\circ = \psi_1 = \sum_{w \geq 1} \phi_w$ であることから，$w = w_0$，$u = 1$ のとき，*Theorem 1.1 (Gindikin-Karpelevich* 公式*)* が得られる．

Remark 2 *Conjecture 4.1* は $\Phi = A_2, A_3, A_4, D_4$ において成立する．

Remark1 より，Conjecture 4.1 が Gindikin-Karpelevich 公式の拡張であるとみなすことができるが，相違点も存在する．

Definition 4.2 次の条件を満たす $S \subset \Phi$ を *convex* と呼ぶ．
i) $\alpha \in S$ であるとき，$-\alpha \notin S$,
ii) $\alpha, \beta \in S$ かつ $\alpha + \beta \in \Phi$ のとき，$\alpha + \beta \in S$.

Proposition 4.3 $u = 1$ のとき，すなわち *Gindikin-Karpelevich fomula* において，$S(1, v) = \{\alpha \in \Phi^+ | v(\alpha) \in \Phi^-\}$ は *convex* である．また Φ^+ におけるその補空間 $\{\alpha \in \Phi^+ | v(\alpha) \in \Phi^+\}$ もまた *convex* である．

ただし，これは一般の $S(u, v)$ については成立しない．実際，A_2 型では，Table 1. より次が

TABLE 1. A_2 型における $S(u, v)$ 一覧.

u	v	$S(u,v)$
1	1	$\{\}$
1	s_2	$\{\alpha_2\}$
1	s_1	$\{\alpha_1\}$
1	s_1s_2	$\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\}$
1	s_2s_1	$\{\alpha_1; \alpha_2, \alpha_1\}$
1	$s_1s_2s_1$	$\{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2\}$
s_2	s_2	$\{\}$
s_2	s_1s_2	$\{\alpha_1 + \alpha_2\}$
s_2	s_2s_1	$\{\alpha_1\}$
s_2	$s_1s_2s_1$	$\{\alpha_1, \alpha_2\}$
s_1	s_1	$\{\}$
s_1	s_1s_2	$\{\alpha_2\}$
s_1	s_2s_1	$\{\alpha_1 + \alpha_2\}$
s_1	$s_1s_2s_1$	$\{\alpha_1, \alpha_2\}$
s_1s_2	s_1s_2	$\{\}$
s_1s_2	$s_1s_2s_1$	$\{\alpha_1\}$
s_2s_1	s_2s_1	$\{\}$
s_2s_1	$s_1s_2s_1$	$\{\alpha_2\}$
$s_1s_2s_1$	$s_1s_2s_1$	$\{\}$

確かめられる.

Example 4.4 $u=s_1$, $v=s_1s_2s_1$ のとき, $S(u,v)=\{\alpha_1,\alpha_2\}$ は *convex* ではない.

Example 4.5 $u=s_2$, $v=s_1s_2$ のとき, $S(u,v)=\{\alpha_1+\alpha_2\}$ *simple root* を含まないので *convex* ではない.

最後に Conjecture 4.1 における Φ が simply-laced (すなわち A, D, E 型) である条件の必要性について述べる. これは次の事実から得られた.

Proposition 4.6 $\Phi=B_2$ において, α_1,α_2 をそれぞれ *long* および *short simple roots* とする. このとき, $(u,v)=(s_1,s_1s_2s_1)$ および $(s_1,s_1s_2s_1s_2)$ において *Conjecture 4.1* は成立しない.

Remark 3 $\Phi=B_2$ には *33* 個の (u,v) $(u\leq v)$ が存在するが, *Conjecture4.1* が成立しないのは, *Proposition 4.6* の場合のみであり, それ以外の *31* 個の (u,v) については成立する.

References

[1] B. Brubaker, D. Bump, and S. Friedberg, Weyl group multiple Dirichlet series: Type A combinatorial theory. Preprint (2009).

[2] D. Bump and M.Nakasuji, Integration on p-adic groups and crystal bases, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 138 (2010) 1595-1605.

[3] D. Bump and M.Nakasuji, Casselman's basis of Iwahori vector and the Bruhat order, to appear in *Canadian Journal of Mathematics.*

[4] W. Casselman, The unramified principal series of $\mathfrak{p}$-adic groups. I. The spherical function, *Compositio Math.*, 40(3) (1980) 387-406.

[5] S. Gindikin and F. Karpelevich, Plancherel measure for symmetric Riemannian spaces of non-positive curvature, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 145 (1962) 252-255.

[6] M. Kashiwara, On crystal bases. In *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, volume 16 of CMS Conf. Proc., pages 155-197. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[7] M. Kashiwara, Similarity of crystal bases, In *Lie algebras and their representations (Seoul, 1995)*, *Contemp. Math.* 194 (1996)177-186.

[8] D. Kazhdan and S. Patterson, Metaplectic forms, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.,*, 59 (1984) 35-142.

[9] R.P. Langlands, Euler products, Yale University Press, New Haven, Conn., 1971. A James K. Whittemore Lecture in Mathematics given at Yale University, 1967, Yale Mathematical Monographs, 1.

[10] P. Littelmann, Cones, crystals, and patterns, *Transform. Groups*, 3 (2) (1998) 145-179.

[11] T. Tokuyama, A generating function of strict Gelfand patterns and some formulas on characters of general linear groups, *J. Math. Soc. Japan*, 40 (4) (1988) 671-685.

E-mail address: nakasuji@tsuda.ac.jp